Robotik I: Einführung in die Robotik
Dynamik

Tamim Asfour

KIT-Fakultät für Informatik, Institut für Anthropomatik und Robotik (IAR)
Hochperformante Humanoide Technologien (H^2T)

Robotermodellierung – Überblick

- Geometrische Modellierung
  - Geometrie: mathematische Beschreibung der Form von Körpern
- Kinematische Modellierung
  - Kinematik: Lehre der geometrischen und analytischen Beschreibung der Bewegungszustände mechanischer Systeme
- Dynamische Modellierung
  - Dynamik: Untersuchung der Bewegung von Körpern als Folge der auf sie wirkenden Kräfte und Momente

Inhalt

- Geometrisches Modell
- Dynamisches Modell
- Modellierung der Dynamik
  - Methode nach Lagrange
  - Methode nach Newton-Euler

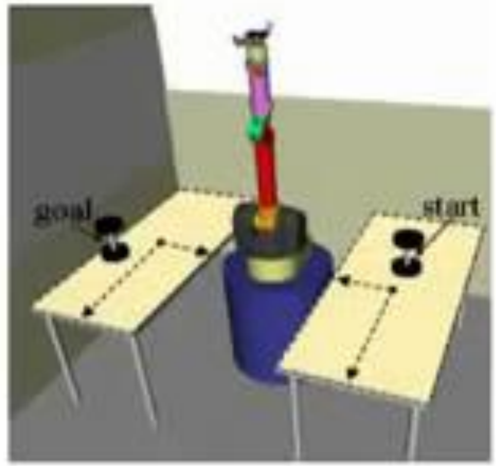
Dynamisches Modell: Definition & Zweck

- Definition:
  - Das dynamische Modell beschreibt den Zusammenhang von Kräften, Momenten und Bewegungen, welche in einem mechanischen Mehrkörpersystem auftreten.

- Zweck:
  - Analyse der Dynamik
  - Synthese mechanischer Strukturen
  - Modellierung elastischer Strukturen
  - Reglerentwurf

Motivation

Moving a Heavy Dumbbell with Sliding



Task: Move the dumbbell from one table to the other.

Constraints:

1. Stay within torque limits of arm for dumbbell mass w.
2. Sliding the dumbbell is allowed.

https://personalrobotics.ri.cmu.edu/projects/cplan.php
http://www.youtube.com/watch?v=APAhs7GC090

Motivation

Dynamisches Modell: Allgemeines Modell

- Roboter besteht aus n Partikeln mit Masse m_i und Position $\boldsymbol{r_i}$
- Newtons zweites Gesetz: $\boldsymbol{F}_i = m_i \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}_i \qquad i = 1, \dots, n$
- Partikel können sich wegen Verbindungen und Gelenken nicht unabhängig voneinander bewegen
  - Einführung von Einschränkungen (constraints) der Form $g_j(\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r_n}) = 0 \qquad j = 1, \dots, k$
  - Einschränkungen dieser Art nennt man auch holonome Einschränkungen
  - Einschränkungen wirken auf den Roboter durch Ausübung von Einschränkungskräften (constraint forces)

Dynamisches Modell: Allgemeines Modell

- Parameter im allgemeinen Modell

$$3n + k \qquad\qquad \text{(da } \boldsymbol{r}_i \in \mathbb{R}^3\text{)}$$

- Tatsächliche Freiheitsgrade

$$3n - k$$

- **Ziel:**
  Minimaler Parametersatz, der das System vollständig beschreibt

  ➔ **Generalisierte Koordinaten**

Dynamisches Modell: Generalisierte Koordinaten

- **Definition:**

  Minimaler Satz an voneinander unabhängigen Koordinaten, der den aktuellen Systemzustand vollständig beschreibt.

- **Generalisierte Koordinaten:**

$$q_1, \dots, q_m \quad \text{mit} \quad m = 3n - k$$

- **Gesucht:**

  Funktionen für Position der Massepunkte

$$\boldsymbol{r}_i = f_i(q_1, \dots, q_m) \qquad i = 1, \dots, n$$

  die gleichzeitig die Einschränkungen (constraints) einhalten

$$g_j(\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_k) = 0 \qquad j = 1, \dots, k$$

Generalisierte Koordinaten : Beispiel

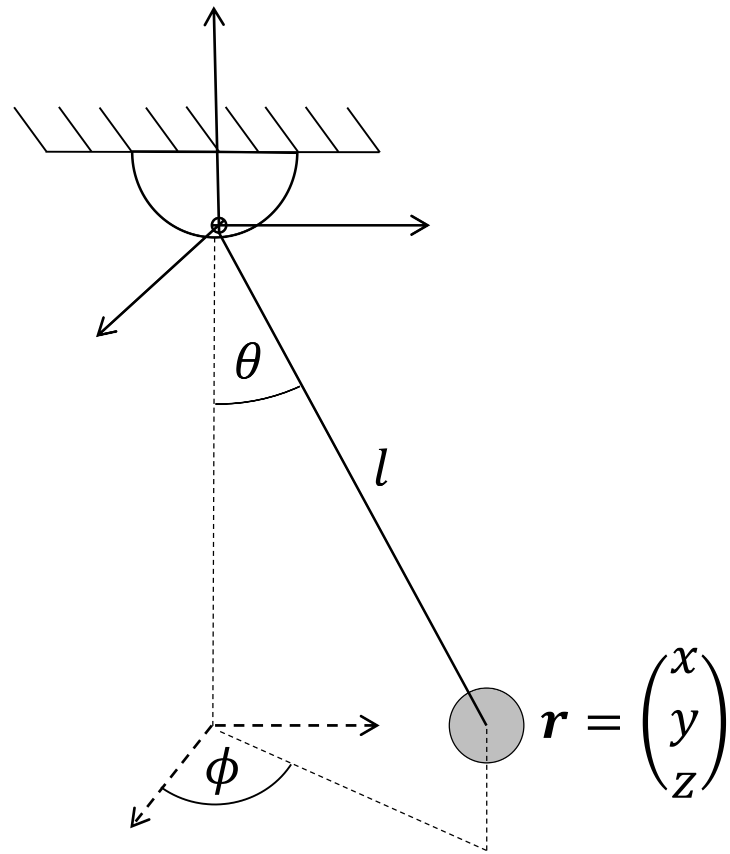
- Position der Masse: $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- Einschränkung auf Kugeloberfläche

$$|\boldsymbol{r}| = l \Leftrightarrow |\boldsymbol{r}| - l = 0$$
$$g(\boldsymbol{r}) = |\boldsymbol{r}| - l = 0$$

- Gen. Koordinaten: $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{r} = f(\boldsymbol{q}) = l \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$



Dynamisches Modell: Bewegungsgleichung

Im dynamischen Modell werden die Beziehungen zwischen Kräften/Momenten und den Lagen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Armelemente dargestellt.

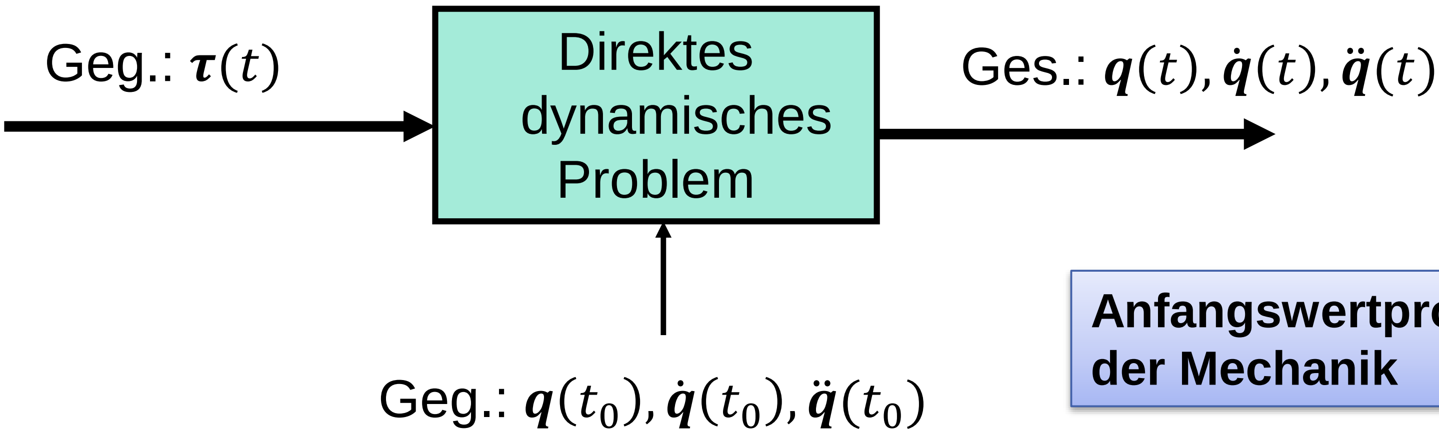
$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q}) \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + c(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}) + g(\boldsymbol{q})$$

$\boldsymbol{\tau}$:	$n \times 1$ Vektor der generalisierten Kräfte
$M(\boldsymbol{q})$:	$n \times n$ Massenträgheitsmatrix
$c(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q})$:	$n \times 1$ Vektor der Zentripetal- und Corioliskomponenten
$g(\boldsymbol{q})$:	$n \times 1$ Vektor der Gravitationskomponenten
$\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$, $\ddot{\boldsymbol{q}}$:	$n \times 1$ Vektor der generalisierten Koordinaten (Position, Geschwindigkeit, Beschleunigung)

- Reibung kann als zusätzlicher Term einfließen, wird aber häufig vernachlässigt

Direktes dynamisches Problem

- Aus äußeren Kräften und Momenten sowie Anfangszustand wird unter Verwendung des dynamischen Modells die sich ergebenden Bewegungsänderungen berechnet.



Anfangswertproblem der Mechanik

- $\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q}) \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + c(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}) + g(\boldsymbol{q})$
- Differentialgleichung nach $\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), \ddot{\boldsymbol{q}}(t)$ lösen

Inverses dynamisches Problem

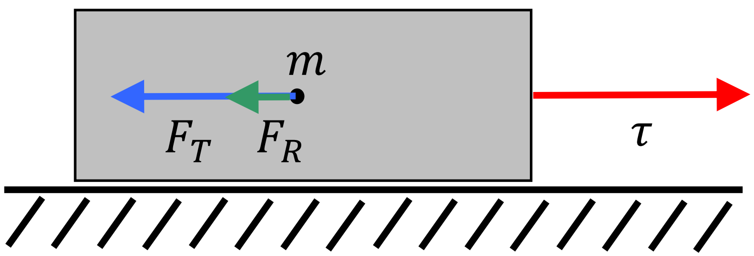
- Aus den gewünschten Bewegungsparametern sollen, unter Verwendung des dynamischen Modells, die dazu erforderlichen Stellkräfte und -momente ermittelt werden.

Geg.: $\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), \ddot{\boldsymbol{q}}(t)$ → Inverses dynamisches Problem → Ges.: $\boldsymbol{\tau}(t)$

- $\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q}) \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + c(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}) + g(\boldsymbol{q})$

- Rechten Teil der Gleichung berechnen durch Einsetzen

Dynamisches Modell: Beispiel



$F_T = -m\ddot{x}$ Trägheit

$F_R = -K_{GR}\dot{x}$ Gleitreibung

τ Externe Kraft

- Kräftebilanz: $\tau = -(F_T + F_R)$
- Bewegungsgleichung: $\tau = m\ddot{x} + K_{GR}\dot{x}$
- **Inverses Problem:** gegeben Bewegungszustand, welche externe Kraft τ wirkt auf das System.
- **Direktes Problem:** gegeben externe Kraft und aktueller Bewegungszustand, berechne neue Beschleunigung.

Inhalt

Modellierung der Dynamik

Methoden:

- Lagrange: Analytische Methode
  - Arbeits- oder Energiebetrachtungen
  - Formales Ableiten ergibt die Bewegungsgleichungen

- Newton-Euler: Synthetische Methode
  - Basiert auf linearem Impuls und Drehimpuls (Drall)
  - Isoliertes betrachten der Armelemente

Inhalt

- Geometrisches Modell
- Dynamisches Modell
- Modellierung der Dynamik
  - Methode nach Lagrange
  - Methode nach Newton-Euler

Methode nach Lagrange

- Lagrange-Funktion:

$$\boxed{L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = E_{kin}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - E_{pot}(\boldsymbol{q})}$$

- Bewegungsgleichung:

$$\boxed{\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}}$$

- q_i: i-te Komponente der generalisierten Koordinaten
- τ_i: i-te Komponente der generalisierten Kräfte

Methode nach Lagrange: Vorgehen

- **Ziel:** Ermittle für jedes Gelenk i eines Roboters die Bewegungsgleichung

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- Vorgehen:
  1. Berechne E_{kin} und E_{pot}
  2. Drücke E_{kin} und E_{pot} in generalisierten Koordinaten aus

$$L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = E_{kin}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - E_{pot}(\boldsymbol{q})$$

  3. Berechne die Ableitungen

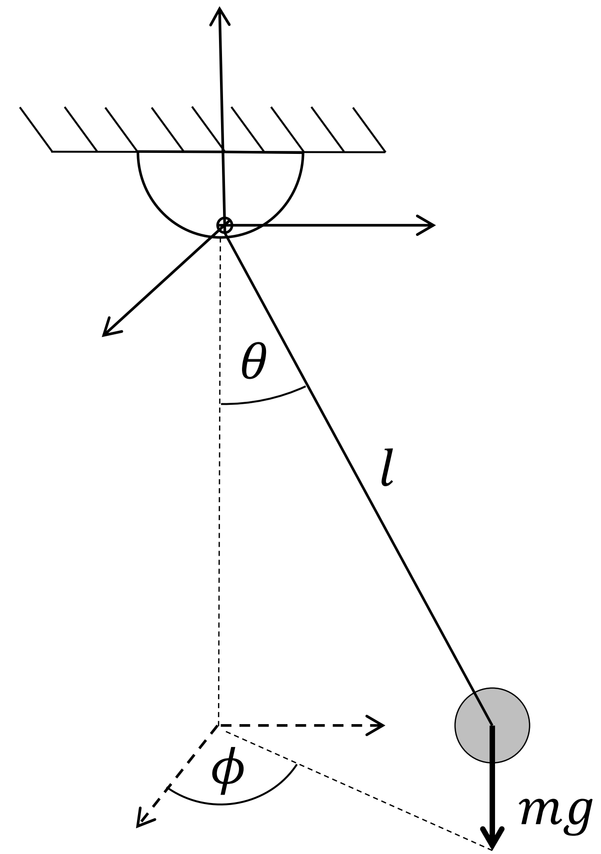
Methode nach Lagrange: 3D-Pendel (1)

- 3D-Pendel mit Gravitation

- $\boldsymbol{r} = f(\boldsymbol{q}) = l \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$

- $E_{kin} = \frac{1}{2}m|\dot{\boldsymbol{r}}|^2 = \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \cdot \sin^2\theta\right)$

- $E_{pot} = -m \cdot g \cdot h = -mg \cdot (l \cdot \cos\theta)$

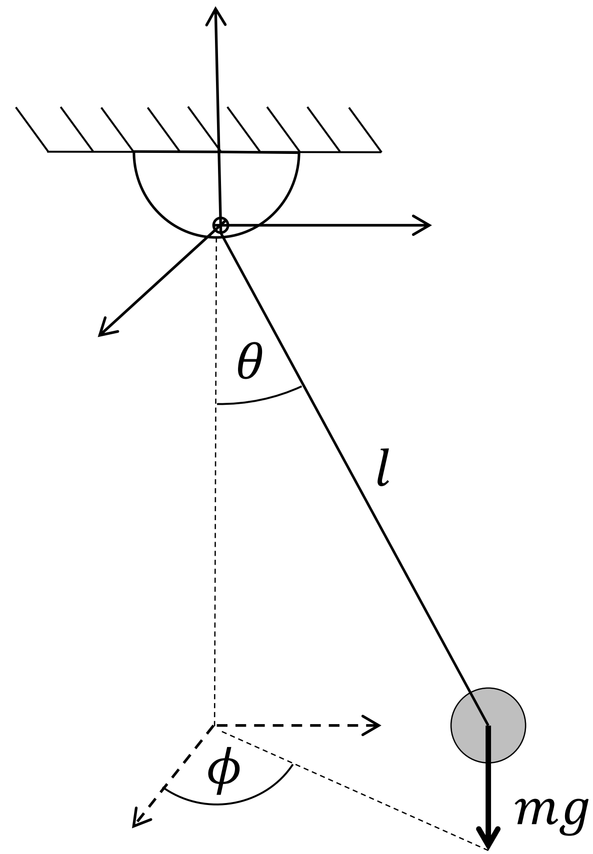


Methode nach Lagrange: 3D-Pendel (2)

- Lagrange-Funktion mit $\boldsymbol{q} = (\theta, \phi)$

$$L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = E_{kin}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - E_{pot}(\boldsymbol{q})$$
$$= \frac{1}{2} m l^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \cdot \sin^2 \theta\right) + mgl \cdot \cos\theta$$

$$\boldsymbol{\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}}$$



- Ableiten:
  - $\frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2 \sin\theta \cos\theta \cdot \dot{\phi}^2 - mgl \cdot \sin\theta$
  - $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(ml^2 \dot{\theta}\right) = ml^2 \ddot{\theta}$
  - $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$
  - $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = \frac{d}{dt}\left(ml^2\, \dot{\phi} \cdot \sin^2\theta\right) = ml^2 \sin^2\theta \cdot \ddot{\phi} + 2ml^2 \sin\theta \cos\theta \cdot \dot{\theta}\dot{\phi}$

Methode nach Lagrange: 3D-Pendel (3)

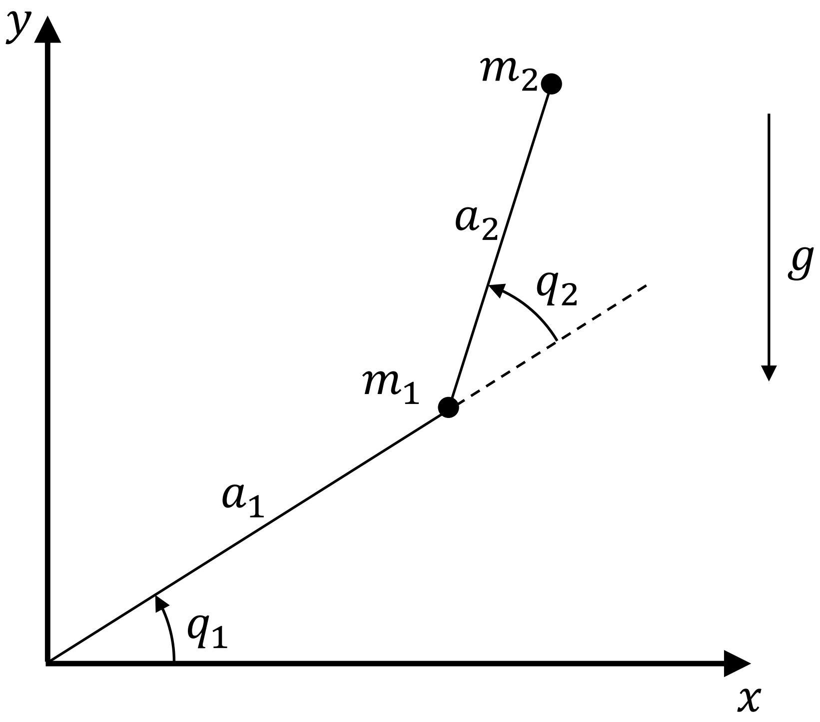
- Bewegungsgleichung des 3D-Pendels

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -ml^2 \sin\theta \cos\theta \cdot \dot{\phi}^2 \\ 2ml^2 \sin\theta \cos\theta \cdot \dot{\theta}\dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mgl\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Entspricht allgemeiner Bewegungsgleichung

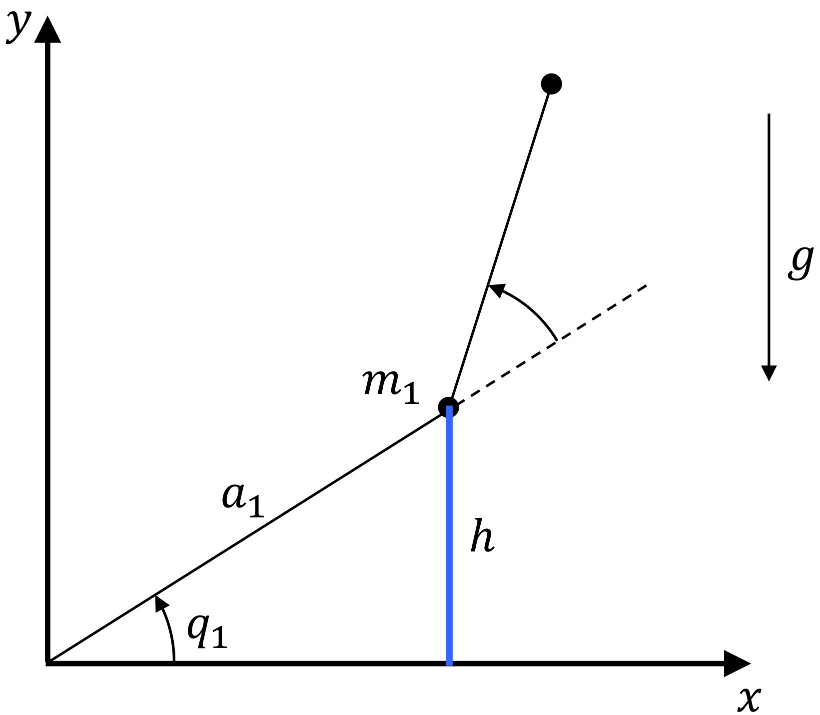
$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q})\,\ddot{\boldsymbol{q}} + c(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}) + g(\boldsymbol{q})$$

Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (1)



- Idealisierung:
  - Masse der Armelemente als Punktmassen in m_1 und m_2
  - Keine Reibung

Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (2)

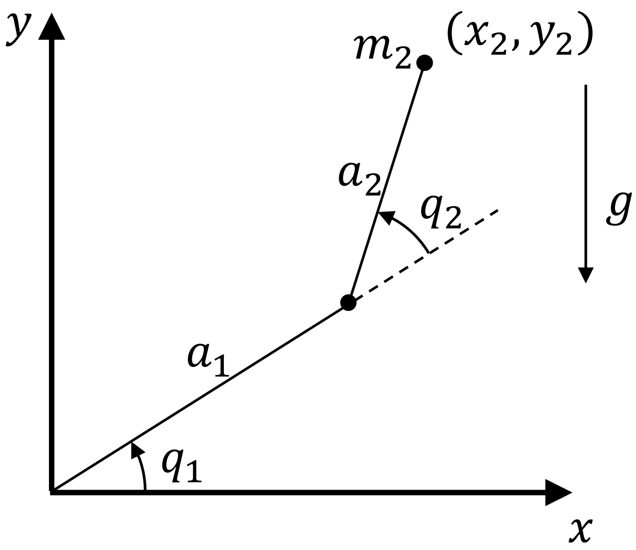


- Gelenk 1:

$$E_{kin,1} = \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 {a_1}^2 {\dot{q}_1}^2$$

$$E_{pot,1} = m_1 g h = m_1 g a_1 \sin(q_1)$$

Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (3)



- Gelenk 2:

Position:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_1 + q_2) \\ a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

Geschwindigkeit:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \dot{q}_1 \sin(q_1) - a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\sin(q_1 + q_2) \\ a_1 \dot{q}_1 \cos(q_1) + a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (4)

- Gelenk 2:
  - Kinetische Energie:

$$v_2{}^2 = \dot{x}_2{}^2 + \dot{y}_2{}^2 = a_1{}^2\dot{q}_1{}^2 + a_2{}^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2a_1a_2\left(\dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2\right)\cos(q_2)$$

$$E_{kin,2} = \frac{1}{2}m_2v_2{}^2$$

$$= \frac{1}{2}m_2a_1{}^2\dot{q}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2a_2{}^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_2a_1a_2\left(\dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2\right)\cos(q_2)$$

  - Potentielle Energie:

$$E_{pot,2} = m_2gy_2 = m_2g[a_1\sin(q_1) + a_2\sin(q_1 + q_2)]$$

  - Lagrange-Funktion:

$$L = E_{kin} - E_{pot} = E_{kin,1} + E_{kin,2} - E_{pot,1} - E_{pot,2}$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)a_1{}^2\dot{q}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2a_2{}^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_2a_1a_2\left(\dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2\right)\cos(q_2)$$

$$-(m_1 + m_2)ga_1\sin(q_1) - m_2ga_2\sin(q_1 + q_2)$$

Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (5)

- Bewegungsgleichung
  - Gelenk 1:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2){a_1}^2\dot{q}_1 + m_2{a_2}^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_2 a_1 a_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\cos(q_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = (m_1 + m_2){a_1}^2\ddot{q}_1 + m_2{a_2}^2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 a_1 a_2(2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)\cos(q_2)$$

$$-m_2 a_1 a_2\left(2\dot{q}_1\dot{q}_2 + {\dot{q}_2}^2\right)\sin(q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -(m_1 + \mathrm{m}_2) g a_1 \cos(q_1) - m_2 g a_2 \cos(q_1 + q_2)$$

  - Gelenk 2:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2{a_2}^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_2 a_1 a_2 \dot{q}_1 \cos(q_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = m_2{a_2}^2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 a_1 a_2 \ddot{q}_1 \cos(q_2) - m_2 a_1 a_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -m_2 a_1 a_2\left({\dot{q}_1}^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2\right)\sin(q_2) - m_2 g a_2 \cos(q_1 + q_2)$$

Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (6)

- Bewegungsgleichung:

$$\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(m_1+m_2){a_1}^2 + m_2{a_2}^2 + 2m_2a_1a_2\cos(q_2) & m_2{a_2}^2 + m_2a_1a_2\cos(q_2)\\ m_2{a_2}^2 + m_2a_1a_2\cos(q_2) & m_2{a_2}^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}-m_2a_1a_2\left(2\dot{q}_1\dot{q}_2+{\dot{q}_2}^2\right)\sin(q_2)\\ m_2a_1a_2{\dot{q}_1}^2\sin(q_2)\end{bmatrix}$$

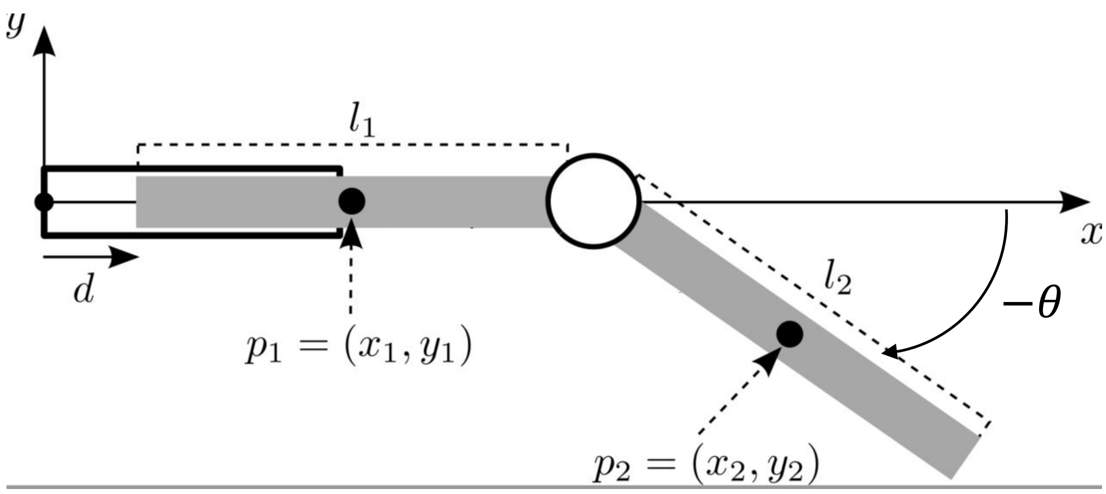
$$+\begin{bmatrix}(m_1+m_2)ga_1\cos(q_1)+m_2ga_2\cos(q_1+q_2)\\ m_2ga_2\cos(q_1+q_2)\end{bmatrix}$$

- Zusammengefasst:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q})\cdot\ \ddot{\boldsymbol{q}} + c(\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q}) + g(\boldsymbol{q})$$

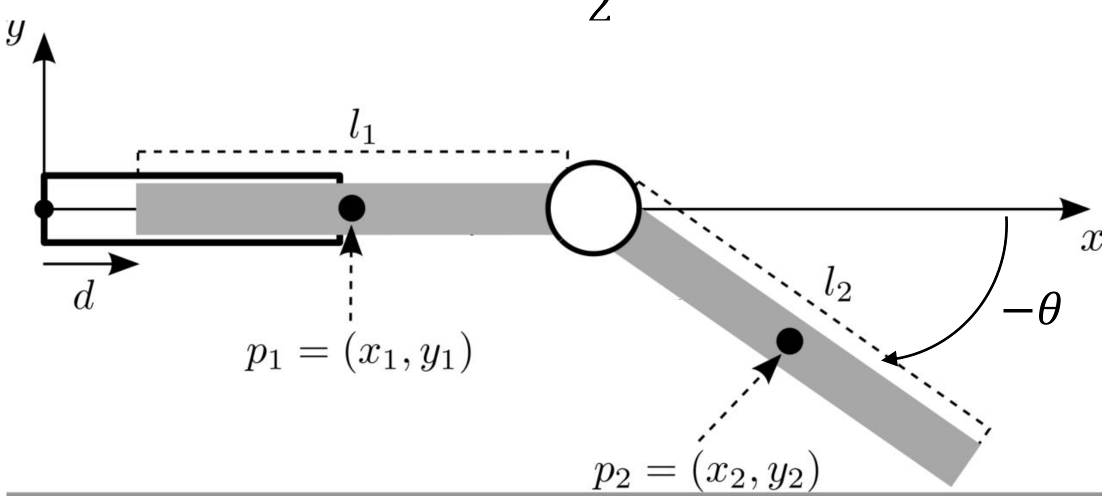
Lagrange Beispiel mit Lineargelenk (1)

- Gelenke
  - Lineargelenk: d
  - Rotationsgelenk: θ
- Masseschwerpunkte (Punktmassen m_1, m_2)
  - $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2)$



Lagrange Beispiel mit Lineargelenk (2)

$$x_1 = \frac{1}{2}l_1 + d$$
$$y_1 = 0$$
$$x_2 = l_1 + d + \frac{1}{2}l_2 cos(\theta)$$
$$y_2 = \frac{1}{2}l_2 sin(\theta)$$



Lagrange Beispiel mit Lineargelenk (3)

- Bewegungsgleichung: $Q = \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}}\right) - \frac{\delta L}{\delta q}$ mit $\mathrm{L} = \mathrm{E_{kin}} - \mathrm{E_{pot}}$
- Kinetische Energie
  - ergibt sich für s_1 aus der Translationsgeschwindigkeit $\dot{d}$:

$$E_{kin,1} = \frac{1}{2}\, m_1\, v_1^2 = \frac{1}{2}\, m_1\, \dot{d}^2$$

  - ergibt sich für s_2 aus der Translationsgeschwindigkeit $(\dot{x}_2, \dot{y}_2)$, des Trägheitsmoment J und der Rotationsgeschwindigkeit $\dot{\theta}$:

$$\begin{aligned} E_{kin,2} &= \frac{1}{2}\, m_2\, v_2^2 + \frac{1}{2}\, J\, \omega^2 \\ &= \frac{1}{2}\, m_2 \left(\dot{x}_2{}^2 + \dot{y}_2^2\right) + \frac{1}{2} J\, \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}\, m_2 \left(\dot{x}_2{}^2 + \dot{y}_2{}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{12} m_2\, l_2^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

  - Trägheitsmoment für Stab mit vernachlässigbarem Radius $J = \frac{1}{12} m_2 l_2^2$

Lagrange Beispiel mit Lineargelenk (4)

- Translationsgeschwindigkeiten
  - $\dot{x_2} \;=\; \dot{d} - \dot{\theta}\frac{1}{2} l_2\, sin(\theta)$
  - $\dot{y_2} = \dot{\theta}\frac{1}{2} l_2\, cos(\theta)$
- Daraus folgt:

$$E_{kin,2} = \frac{1}{2}\, m_2\, \dot{d}^2 \;+ \frac{1}{2}\frac{1}{4} m_2\, l_2^2\, \dot{\theta}^2 \;- \frac{1}{2}\, m_2\, l_2\, \dot{d}\, \dot{\theta}\, sin(\theta) \;+ \frac{1}{24} m_2\, l_2^2\, \dot{\theta}^2$$

- Potentielle Energie und Ableitungen können analog zum ersten Beispiel bestimmt werden
- Bewegungsgleichung:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & -\frac{1}{2} m_2 l_2 \sin(\theta) \\ -\frac{1}{2} m_2 l_2 \sin(\theta) & \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{d} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} m_2 l_2 \dot{\theta}^2 cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} m_2 g cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Methode nach Lagrange: Zusammenfassung

- Zur Ermittlung der Bewegungsgleichungen müssen nur die kinetische und die potentielle Energie aufgestellt werden.
- Die Bewegungsgleichungen folgen dann formal durch differenzieren:

$$\boldsymbol{Q}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}_i}\right) - \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \boldsymbol{q}_i} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{E}_{kin} - \boldsymbol{E}_{pot}$$

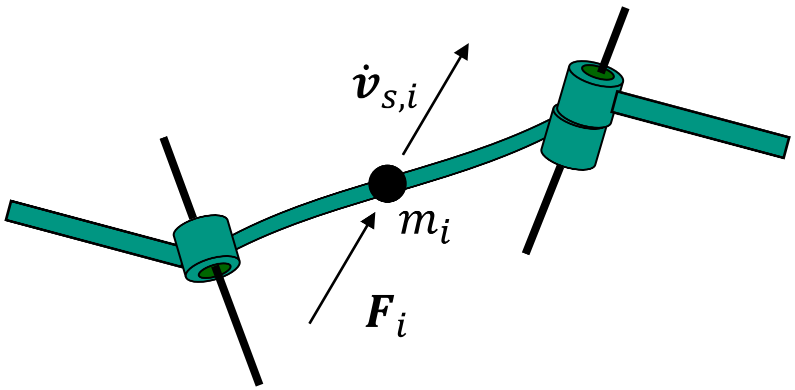
- Einfaches Aufstellen der Gleichungen
- Geschlossenes Modell
- Analytisch auswertbar
- Berechnung sehr umfangreich $O(n^3)$
  (n : Anzahl der Gelenke)
- Nur Antriebsmomente werden berechnet

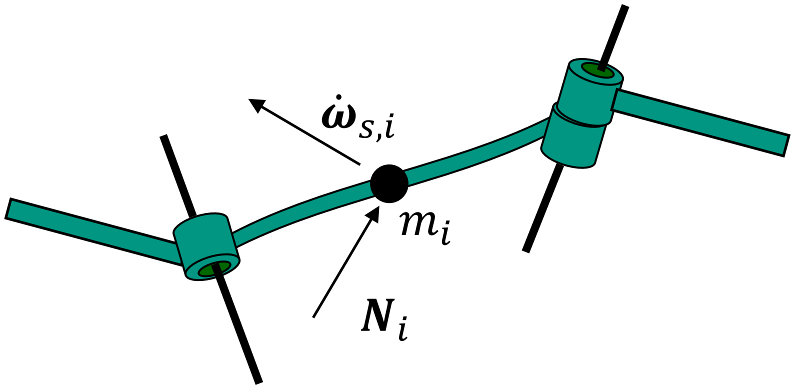
Inhalt

- Geometrisches Modell
- Dynamisches Modell
- Modellierung der Dynamik
  - Methode nach Lagrange
  - Methode nach Newton-Euler

Methode nach Newton-Euler: Grundprinzip

- Betrachtung des Massenzentrums eines einzelnen Armelementes
  - Kraft = Impuls abgeleitet nach Zeit (Zweites Newtonsches Gesetz)
    $$\boldsymbol{F}_i = \frac{d}{dt}\left(m_i\, \boldsymbol{v}_{s,i}\right) = m_i\, \dot{\boldsymbol{v}}_{s,i}$$
  - Drehmoment = Drehimpuls abgeleitet nach Zeit
    $$\boldsymbol{N}_i = \frac{d}{dt}\left(I_i\, \boldsymbol{\omega}_{s,i}\right) = I_i\, \dot{\boldsymbol{\omega}}_{s,i}$$
- Kräfte und Momente, die auf ein Armelement wirken, lassen sich aus Geschwindigkeit und Gelenkwinkelgeschwindigkeit berechnen.





Methode nach Newton-Euler: Verkettung

- Die Beschleunigungen $\dot{v}_{s,i}$ und $\dot{\omega}_{s,i}$ eines Armelementes i hängen von den Beschleunigungen der vorhergehenden Armelemente ab.
  - Beschleunigungen können über kinematisches Modell **von der Basis zum Greifer** rekursiv berechnet werden
  - Vorwärtsgleichungen

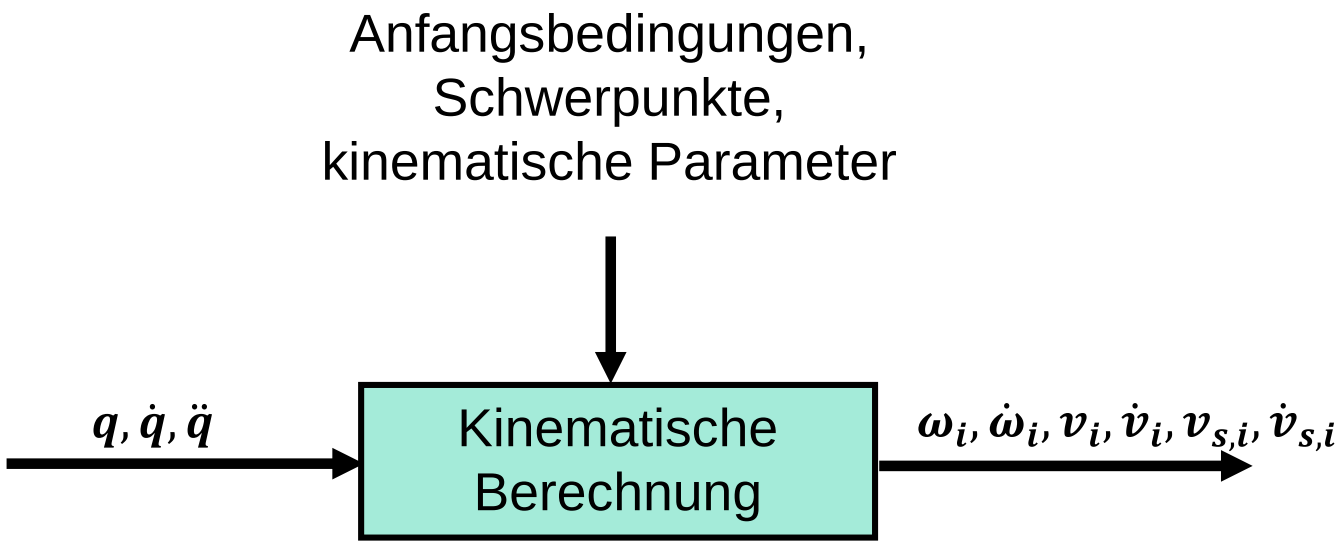
- Die Kraft $\boldsymbol{F_i}$ und das Drehmoment $\boldsymbol{N_i}$, die auf ein Armelement i wirken, hängen von den nachfolgenden Armelementen ab.
  - Kräfte und Momente können **vom Greifer zur Basis** rekursiv berechnet werden
  - Rückwärtsgleichungen

Methode nach Newton-Euler: Vorwärtsgleichungen

- Aus dem kinematischen Robotermodell und dem Systemzustand lassen sich Winkelgeschwindigkeiten, translatorische Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Gelenkes und Armelementes i im Basiskoordinatensystem bestimmen.

- Bestimmt werden:
  - Winkelgeschwindigkeit ω_i
  - Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_i$
  - Geschwindigkeit v_i und Beschleunigung $\dot{v}_i$ der Basen der Koordinatensysteme
  - Geschwindigkeiten $v_{s,i}$ und Beschleunigungen $\dot{v}_{s,i}$ der Massenmittelpunkte der Armelemente

Methode nach Newton-Euler: Vorwärtsgleichungen



- Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen für Armelement $i + 1$ lassen sich rekursiv unter Berücksichtigung der Kinematik aus den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Armelementes i berechnen.

Methode nach Newton-Euler: Vorwärtsgleichungen

- Die Funktionen G_i lassen sich aus den Gleichungen für Kraft und Drehmoment ableiten

Eingabedaten: $\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), \ddot{\boldsymbol{q}}(t)$

Startwerte der Rekursionsformeln $\boldsymbol{\omega_0}, \dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{0}, \boldsymbol{v_0}, \dot{\boldsymbol{v}}_\mathbf{0}$

Rekursive Berechnung der Kinematik von der Basis zum Greifer (Vorwärtsgleichungen)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{i+1}} &= G_1(\boldsymbol{\omega_i}, \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{i+1}}, \dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{i+1}}) \\
\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{i+1}} &= G_2(\boldsymbol{\omega_i}, \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{i+1}}, \dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{i+1}}, \ddot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{i+1}}) \\
\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i+1}} &= G_3(\boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{\omega_i}, \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{i+1}}) \\
\dot{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i+1}} &= G_4(\dot{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{\omega_i}, \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{i+1}}) \\
\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{s,i+1}} &= G_5(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i+1}}, \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{i+1}}) \\
\dot{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{s,i+1}} &= G_6(\dot{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i+1}}, \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{i+1}}, \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{i+1}})
\end{aligned}
$$

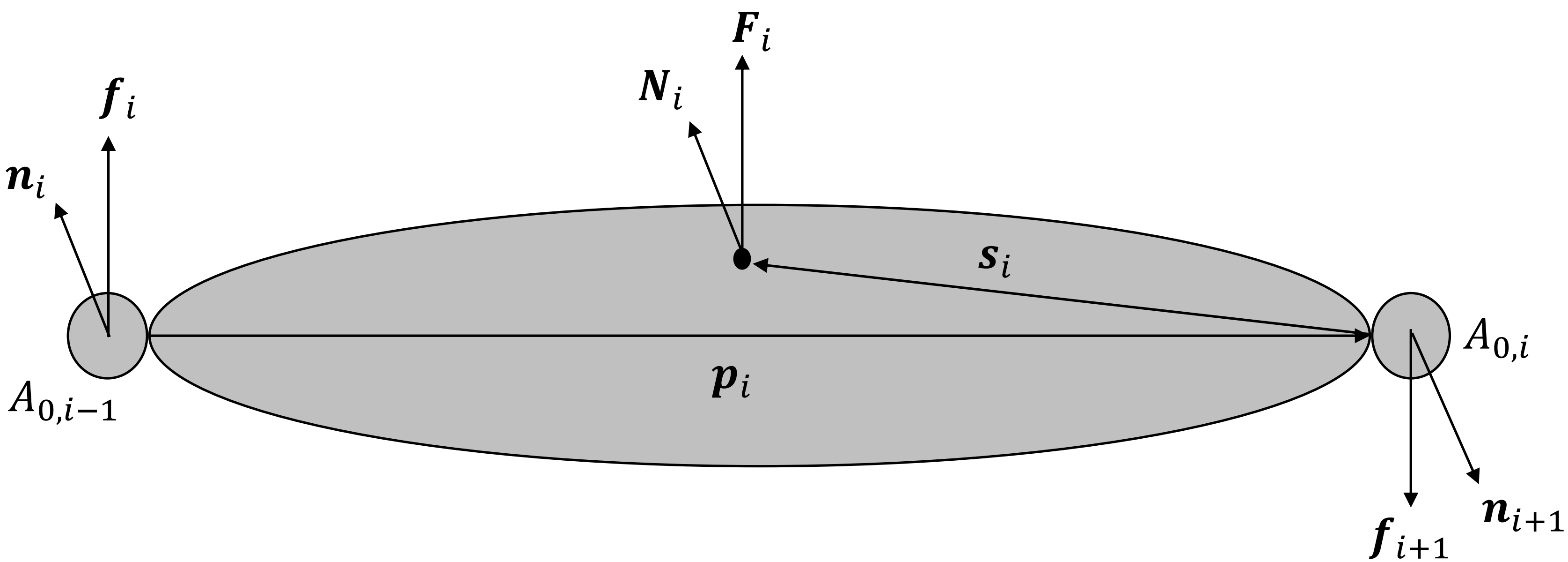
Methode nach Newton-Euler: Rückwärtsgleichungen

- Beginnend vom Greifer des Roboters lassen sich die dynamische Größen des Systems rekursiv bis zur Basis berechnen. Dabei werden die im Vorwärtsschritt berechneten Größen verwendet.

- Folgende dynamische Größen werden bestimmt:
  - Auftretende Kraft $\boldsymbol{F}_i$ im Schwerpunkt von Armelement i
  - Auftretender Drehimpuls $\boldsymbol{N}_i$ im Schwerpunkt von Armelement i
  - Kraftvektor $\boldsymbol{f}_i$ ausgeübt von Armelement $i-1$ auf Armelement i
  - Momentvektor $\boldsymbol{n}_i$ ausgeübt von Armelement $i-1$ auf Armelement i
  - Skalares Drehmoment τ_i am i-ten Gelenk

Methode nach Newton-Euler: Rückwärtsgleichungen

- Betrachtung eines einzelnen Armelements



Methode nach Newton-Euler: Rückwärtsgleichungen

- Verwendung des Kraft-Momenten-Satzes:

$$\boldsymbol{F}_i = m_i \cdot \dot{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{f}_i - \boldsymbol{f}_{i+1}$$

aus Vorwärtsgleichungen

- und des Drehimpulssatzes:

$$\boldsymbol{N}_i = I_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \boldsymbol{n}_i - \boldsymbol{n}_{i+1} + (-\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{p}_i) \times \boldsymbol{F}_i - \boldsymbol{p}_i \times \boldsymbol{f}_{i+1}$$

- Rekursive Berechnung der dynamischen Größen des Armelements i

- m_i: Masse des Armelements i
- I_i: Trägheitstensor des Armelements i
- s_i, p_i: Geometrische Betrachtung auf vorheriger Folie

Methode nach Newton-Euler: Rückwärtsgleichungen

Externe Kräfte und Momente an Endeffektor als Startwerte

$$\boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{F}_{ex}$$
$$\boldsymbol{N}_n = \boldsymbol{N}_{ex}$$

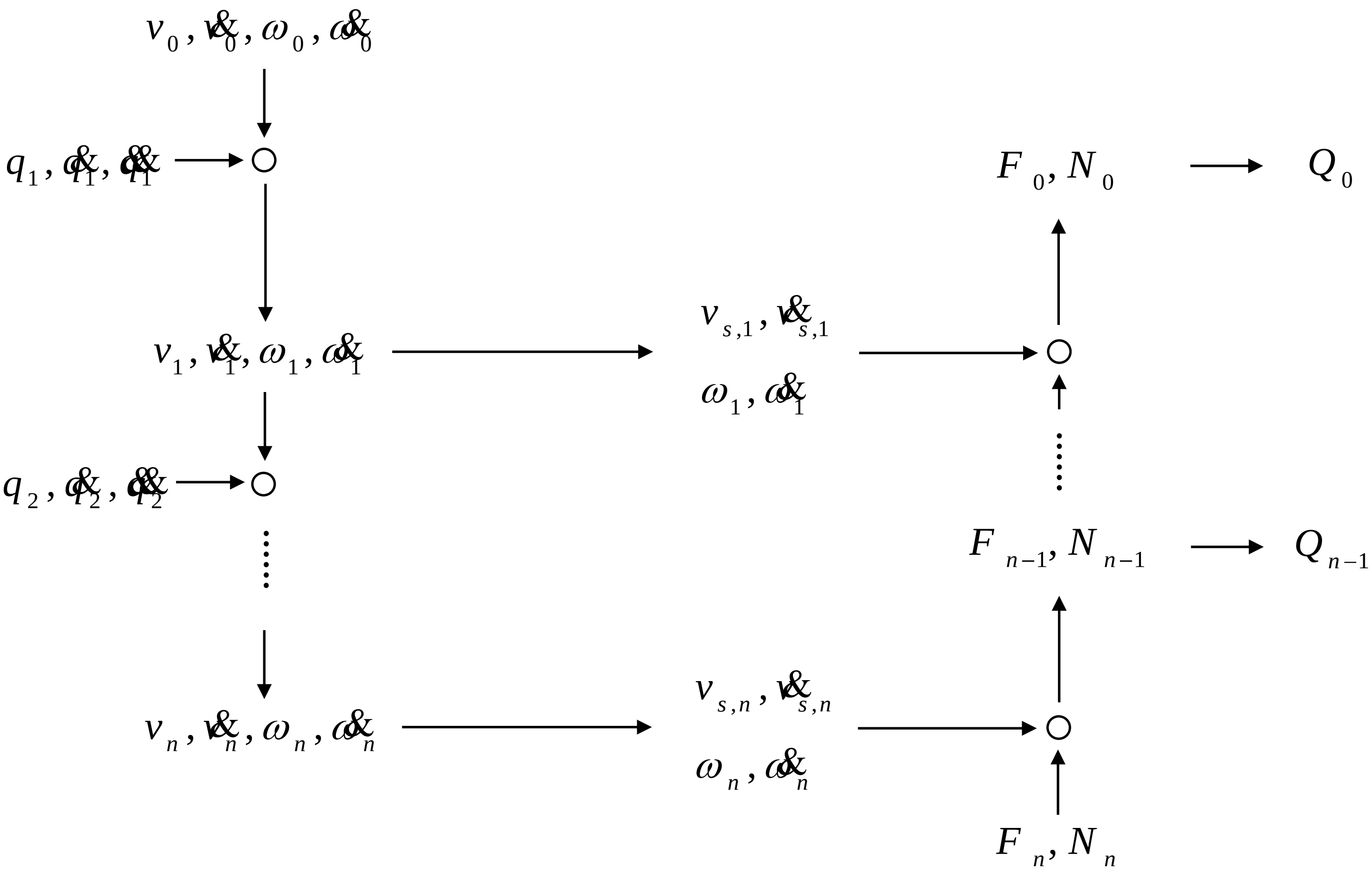
Rekursive Berechnung der Dynamik vom Greifer zur Basis (Rückwärtsgleichungen)

$$\boldsymbol{F}_i = H_1(\dot{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{i}})$$
$$\boldsymbol{N}_i = H_2(\boldsymbol{\omega}_i, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i, \boldsymbol{q}_i, \dot{\boldsymbol{q}}_i)$$
$$\boldsymbol{f}_i = H_3(\boldsymbol{f}_{i+1}, \boldsymbol{F}_i, \boldsymbol{q}_{i+1})$$
$$\boldsymbol{n}_i = H_4(\boldsymbol{n}_{i+1}, \boldsymbol{f}_{i+1}, \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{N}_i, \boldsymbol{q}_{i+1})$$
$$\tau_i = H_5(\boldsymbol{n}_i, \boldsymbol{q}_i)$$

$$\boldsymbol{\tau}(t)$$

Methode nach Newton-Euler: Zusammenfassung

(Bewegung der Basis)



(Kräfte und Momente am Endeffektor)

Methode nach Newton-Euler: Eigenschaften

- Beliebige Anzahl von Gelenken
- Belastungen der Armelemente werden berechnet
- Aufwand $O(n)$ (n: Anzahl der Gelenke)
- Rekursion